

增量网络法矩阵形式的灵敏度分析方法研究

齐超¹, 陈希有², 杨旭强¹, 杨春玲¹, 于为雄¹

(1. 哈尔滨工业大学, 哈尔滨 150001; 2. 大连理工大学, 辽宁 大连 116024)

摘要: 灵敏度是衡量物理仪表输出对所测量参数变化敏感程度的一个重要标志, 通过灵敏度的研究可加深对仪表内部的网络构造和电路原理的理解, 特别是电学仪表更要注重灵敏度的提高。本中通过灵敏度分析实例, 包括问题的提出、问题分析、问题讨论和问题解答, 最终说明增量网络法的矩阵形式分析电路灵敏度时, 需要掌握电路原理的本质、求解方法的适用范围和分析方法的多样性。

关键词: 灵敏度分析; 增量网络法; 矩阵形式

DOI: 10.19753/j.issn1001-1390.2023.11.008

中图分类号: TM133

文献标识码: A

文章编号: 1001-1390(2023)11-0060-06

Research on the sensitivity analysis method in matrix form of incremental network approach

Qi Chao¹, Chen Xiyu², Yang Xuqiang¹, Yang Chunling¹, Yu Weixiong¹

(1. Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China.

2. Dalian University of Technology, Dalian 116024, Liaoning, China)

Abstract: Sensitivity is an important indicator to measure the sensitivity of the output of physical instrument to the variation of measured parameters. The research of sensitivity can enhance the understanding of the network structure and circuit principle inside the instrument, especially further improve the sensitivity of the electrical measuring instrument. In this paper, an example of sensitivity analysis, including problem formulation, problem analysis, problem discussion and problem solution, was presented. Finally, it proved that the essence of circuit principle, the applicable range of solution methods and the diversity of analysis methods were needed to analyze the circuit sensitivity with matrix form of incremental network approach.

Keywords: sensitivity analysis, incremental network approach, matrix form

0 引言

通常决策过程中所预测的自然状态概率及计算出的损益值, 不一定十分精确, 因此, 往往需要对这些变动是否影响最优方案的选择进行深入研究, 这就是灵敏度分析^[1-4]。它是研究与分析一个系统(或模型)的状态或输出对系统参数(或周围条件)变化的敏感程度的方法, 是电路容差分析、最坏情况分析和最优设计的重要基础, 是电网络分析与综合的桥梁, 在确定产品合格率、寿命及对工作环境的适应性方面起着关键的作用^[5-9]。尤其在最优化方法中, 经常利用灵敏度分析来研究原始数据不准确或发生变化时最优解的稳定性^[10-11]。通过灵敏度分析可以确定哪些网络参数对系统(或模型)有较大的影响, 这些参数的变化是否会导致网络函数或网络响应的变化, 严重时影响网络正常工作^[12-15]。

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51877025); 面向新工科专业建设项目(E2125, E2129); 黑龙江省高等教育教学改革重点项目(SJGZ20200048, SJGZ20200052)

对电测与仪表来说, 灵敏度是衡量电气仪表输出对所测量参数变化敏感程度的一个重要标志, 通过灵敏度的研究可加深对仪表的构造和原理的理解^[16-18]。

传统增量网络法是指在原电路结构的基础上, 添加额外的增量网络, 在实际分析电路灵敏度的过程中需要先对原网络求解之后, 才能分析出相应增量与各元件参数增量之间的关系, 最终根据增量网络解得电路灵敏度, 过程相对繁琐, 且容易出错。与传统的增量网络法相比, 矩阵形式的增量网络法仅需要确定原电路的各参数矩阵, 直接求解电路灵敏度, 无需额外增加网络即可求解^[19]。可见增量网络法的矩阵形式具有分析简单、计算量小、可靠性高等优点。

1 绝对灵敏度

灵敏度一般包括绝对灵敏度、相对灵敏度和半相对灵敏度。网络函数 H 或网络响应 R (统一可用 T 来表示) 对某元件相关参数 p 的变化率称为网络函数对该参数的绝对灵敏度, 记作:

$$S = \partial T / \partial p \quad (1)$$

所以绝对灵敏度也称微分灵敏度。若将 T 表示为输出响应 $R(s)$ 与不变输入激励 $E(s)$ 的比值, 有:

$$T(s) = R(s)/E(s) \quad (2)$$

代入式(1)整理得:

$$S = \frac{\partial T}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{R(s)}{E(s)} \right) = \frac{1}{E(s)} \cdot \frac{\partial R(s)}{\partial p} \quad (3)$$

即:

$$\frac{\partial R(s)}{\partial p} = \frac{\partial T}{\partial p} \cdot E(s) \quad (4)$$

所以网络输出响应 $R(s)$ 对相关参数 p 的绝对灵敏度等于相应网络函数 T 对该参数的绝对灵敏度与输入激励乘积。

由上可见, 只有简单电路才能求出网络函数或输出响应关于电路参数的显函数表达式, 从而借助数学上求偏导数的方法得到绝对灵敏度。为了对较大规模电路网络进行灵敏度分析, 并且便于编写灵敏度分析通用程序, 须建立系统的灵敏度分析方法, 如增量网络法、伴随网络法、符号网络法等。下面讨论增量网络法中, 矩阵形式灵敏度分析含有受控源电路时, 需要特别关注的一个问题。

2 问题提出与分析

增量网络法适用于当网络拓扑结构和激励固定不变, 而元件参数发生微小变化时, 网络响应对元件参数的绝对灵敏度分析。根据参考文献[20], 节点电压方程矩阵形式为:

$$Y_n \dot{U}_n = A Y A^T \dot{U}_n = A(Y \dot{U}_s - \dot{I}_s) \quad (5)$$

式中 A 为网络线图的关联矩阵; Y 为支路导纳矩阵; $Y_n = A Y A^T$ 称为节点导纳矩阵; \dot{U}_s 和 \dot{I}_s 分别为与其他参数无关的支路独立源电压和独立源电流列矢量。方程左侧表示所有经由导纳流出节点的电流代数和, 右侧表示流入该节点的源电流矢量。利用矩阵对标量求导规则, 将式(5)两端对参数 p_i 求偏导数得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(Y_n \dot{U}_n)}{\partial p_i} &= \frac{\partial Y_n}{\partial p_i} \cdot \dot{U}_n + Y_n \frac{\partial \dot{U}_n}{\partial p_i} = A \frac{\partial Y}{\partial p_i} A^T \dot{U}_n + \\ Y_n \frac{\partial \dot{U}_n}{\partial p_i} &= A \frac{\partial Y}{\partial p_i} \dot{U}_s \end{aligned} \quad (6)$$

将支路电压与节点电压关系矩阵 $\dot{U} = A^T \dot{U}_n$ 代入式(6), 得增量网络法计算节点电压对某一参量 p_i 绝对灵敏度的矩阵形式:

$$Y_n \frac{\partial \dot{U}_n}{\partial p_i} = A \frac{\partial Y}{\partial p_i} (\dot{U}_s - \dot{U}) \quad (7)$$

接下来讨论图 1 所示电路, 已知 $\dot{U}_s = 2 \text{ V}$, $Z_1 = 0.5 \Omega$, $Y_2 = 4 \text{ S}$, $Y_3 = 1 \text{ S}$, $g_m = 2 \text{ S}$ 。要求用增量网络法矩阵形式, 求解节点电压 \dot{U}_{n1} 和 \dot{U}_{n2} 对 Z_1 、 Y_3 及 g_m 的绝对灵敏度。

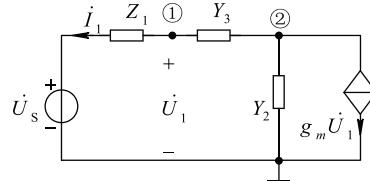


图 1 电路网络 1

Fig. 1 Circuit network 1

依据图 1 得出网络线图如图 2 所示。

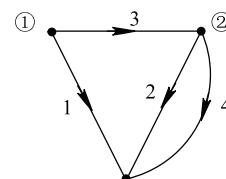


图 2 网络线图

Fig. 2 Network line drawing

写出关联矩阵为:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

支路导纳矩阵为:

$$Y = \begin{bmatrix} 1/Z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_3 & 0 \\ g_m & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

支路独立源电压列矢量为:

$$\dot{U}_s = [2 \ 0 \ 0 \ 0]^T \text{ V}$$

支路独立源电流列矢量为:

$$\dot{I}_s = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \text{ A}$$

进而得节点导纳矩阵为:

$$Y_n = A Y A^T = \begin{bmatrix} Y_3 + 1/Z_1 & -Y_3 \\ -Y_3 + g_m & Y_2 + Y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \text{ S} \quad (9)$$

节点源电流列矢量为:

$$A(Y \dot{U}_s - \dot{I}_s) = \begin{bmatrix} \dot{U}_s/Z_1 \\ g_m \dot{U}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ A} \quad (10)$$

由式(9)、(10)得节点电方程为:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_{n1} \\ \dot{U}_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ A} \quad (11)$$

方程(11)的解为:

$$\dot{U}_n = [\dot{U}_{n1} \ \dot{U}_{n2}]^T = [1.5 \ 0.5]^T \text{ V}$$

支路电压列矢量为:

$$\dot{U} = A^T \dot{U}_n = [1.5 \ 0.5 \ 10.5]^T \text{ V}$$

进而得:

$$\dot{U}_s - \dot{U} = [0.5 \quad -0.5 \quad -1 \quad -0.5]^T V$$

将上述结果代入增量网络法矩阵形式, 分别得;

$$Y_n \frac{\partial \dot{U}_n}{\partial Z_1} = A \frac{\partial Y}{\partial Z_1} (\dot{U}_s - \dot{U}) = \\ A \begin{bmatrix} -1/Z_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [\dot{U}_s - \dot{U}] = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$Y_n \frac{\partial \dot{U}_n}{\partial Y_3} = A \frac{\partial Y}{\partial Y_3} (\dot{U}_s - \dot{U}) = \\ A \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [\dot{U}_s - \dot{U}] = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$Y_n \frac{\partial \dot{U}_n}{\partial g_m} = A \frac{\partial Y}{\partial g_m} (\dot{U}_s - \dot{U}) = \\ A \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [\dot{U}_s - \dot{U}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} \quad (14)$$

将式(12)~式(14)式两侧分别左乘 Y_n^{-1} , 解得节点电压 \dot{U}_{nl} 和 \dot{U}_{n2} 对各相应参数 Z_1 、 Y_3 及 g_m 的绝对灵敏度分别为:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{U}_{nl}}{\partial Z_1} \\ \frac{\partial \dot{U}_{n2}}{\partial Z_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{8} \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{U}_{nl}}{\partial Y_3} \\ \frac{\partial \dot{U}_{n2}}{\partial Y_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{U}_{nl}}{\partial g_m} \\ \frac{\partial \dot{U}_{n2}}{\partial g_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{32} \\ \frac{3}{32} \end{bmatrix} \quad (15)$$

看似整个求解过程没有问题, 但这些解实际上是对图 3 所示的电路, 即电压控制电流源的控制量 \dot{U}_1 为阻抗 Z_1 上电压时的解答, 并不是图 1 中控制量 \dot{U}_1 包括独立电压源 \dot{U}_s 的解答。下面分析问题所在。

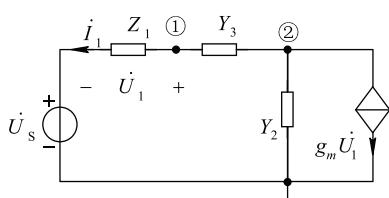


图 3 电路网络 2
Fig. 3 Circuit network 2

通过广义支路学习可知, 对于含有受控源的支路导纳矩阵 Y 的列写规则: 当支路 i 是电压控制电流源 (VCCS) 时, 它受支路 j 导纳上的电压控制, 控制系数为 g_{ij} , 则支路导纳矩阵 Y 的 i 行 j 列元素将产生 $\pm g_{ij}$ 的增量。当控制电压、被控电流分别与支路 j 和支路 i 方

向一致时, g_{ij} 前面取“+”号; 否则, 每改变一个方向, g_{ij} 的前面变号一次。按照这一规则便可直接写出含有 VCCS 的支路导纳矩阵。如果暂且认为式(8)为图 1 的支路导纳矩阵, 根据广义支路图 4 所示的支路方程矩阵形式要满足式(16)。

$$\dot{I} = Y \dot{U} - Y \dot{U}_s + \dot{I}_s \quad (16)$$

式中 \dot{I} 为支路电流列矢量, \dot{U} 为支路电压列矢量。

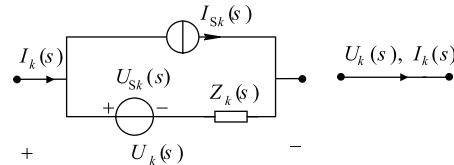


图 4 广义支路及其线图

Fig. 4 Generalized branch and its line diagram

那么由式(8)对图 1 电路就要满足如下的支路方程关系式:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \\ \dot{I}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/Z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_3 & 0 \\ g_m & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \\ \dot{U}_4 \end{bmatrix} -$$

$$\begin{bmatrix} 1/Z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_3 & 0 \\ g_m & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{U}_s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

从式(17)矩阵中可得出 $\dot{I}_4 = g_m(\dot{U}_1 - \dot{U}_s)$ 。这就与电路图 1 中原已知的 $\dot{I}_4 = g_m \dot{U}_1$ 相矛盾。可见, 本文开始时所列写的式(8)的 Y 并不是图 1 电路正确的支路导纳矩阵。也就是说对于含有电压控制电流源, 并且受控源的控制量包含了纯电压源时, 依据广义支路导纳矩阵列写规则写出的 Y 是存在问题的。因为根据第 k 条广义支路 VCR(电压电流关系)方程:

$$\dot{I}_k = Y_k \dot{U}_k - Y_k \dot{U}_{sk} + \dot{I}_{sk} \quad (18)$$

对每一条支路列写电压电流关系有:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = 1/Z_1 \times \dot{U}_1 - 1/Z_1 \times \dot{U}_s \\ \dot{I}_2 = Y_2 \times \dot{U}_2 \\ \dot{I}_3 = Y_3 \times \dot{U}_3 \\ \dot{I}_4 = g_m \times \dot{U}_1 \end{cases} \quad (19)$$

可见, 基于广义支路约束, 无法直接写出对应图的支路导纳矩阵。

3 问题讨论

那么对于受控源控制量包含独立电源参量的电路灵敏度分析问题, 如何解决呢, 笔者认为针对本例可以有以下三种方式。

1) 解决方案一。

将图 1 中的支路 1 戴维南电路转化为诺顿电路, 如图 5 所示。

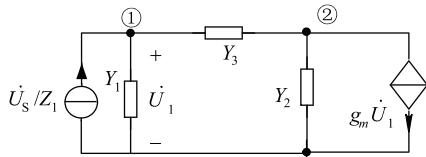


图 5 戴维南电路转化为诺顿电路

Fig. 5 Thevenin circuit converted to Norton circuit

这样控制量就变成了阻抗元件上的电压, 不再包含独立电压源参量。该等效电路支路方程的矩阵形式按照广义支路列写如下:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \\ \dot{I}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/Z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_3 & 0 \\ g_m & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \\ \dot{U}_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -U_s/Z_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

此时支路导纳矩阵即为式(8)。需要注意的是, 这样等效变换后的图 5 中, 独立电压源大小与阻抗参数 Z_1 有关。

2) 解决方案二。

将控制量移到阻抗 Z_1 上的电压 \dot{U}_{Z_1} , 用阴影部分等效被控制量, 如图 6 所示, 后续再用增量网络法矩阵形式求解灵敏度即可。

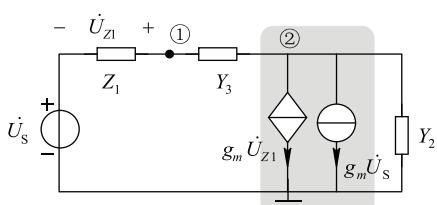


图 6 VCCS 等效变换电路

Fig. 6 VCCS equivalent conversion circuit

3) 解决方案三。

将控制量转化为没有纯电压源的支路参量表示。对图 1 所示电路, 可以用 $\dot{U}_1 = \dot{U}_2 + \dot{U}_3$, 再列写支路导纳矩阵为:

$$Y = \begin{bmatrix} 1/Z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_3 & 0 \\ 0 & g_m & g_m & 0 \end{bmatrix}$$

这样就解决了 4 支路方程列写问题, 支路导纳矩阵满足了广义支路 VCR 方程式(16)。需要注意的是, 如果其它支路还有纯电压源时就得另行考虑。

利用上述三种方法之一, 等效后再列写支路 VCR 方程, 就可得到标准的支路方程矩阵形式式(16), 节点

电压方程矩阵形式也和无受控源时候的式(5)一致。

4 敏感度的求解

采用第 3 小节问题讨论中的解决方案一, 此时支路导纳矩阵既为式(8), 但注意戴维南支路等效为诺顿支路后的电路图 5 中, 支路电压源列矢量 $\dot{U}_s = 0$, 支路 1 有一个与阻抗 Z_1 相关的电流源, 所以这种情况下, 电流源列矢量为 $\dot{I}_s = [-\dot{U}_s/Z_1, 0, 0, 0]^T$, 此时矩阵形式的节点电压方程 $AYA^T \dot{U}_n = A(Y\dot{U}_s - \dot{I}_s)$ 两边对 ρ_i 求导, 考虑方程右侧电流源矢量与元件参数有关, 既 \dot{I}_s 中含有 Z_1 , 所以偏微分项 $\partial \dot{I}_s / \partial Z_1$ 必须保留, 得:

$$A \frac{\partial Y}{\partial \rho_i} A^T \dot{U}_n + AY A^T \frac{\partial \dot{U}_n}{\partial \rho_i} = A \frac{\partial Y}{\partial \rho_i} \dot{U}_s - A \frac{\partial \dot{I}_s}{\partial \rho_i} \quad (20)$$

将支路电压列矢量 $\dot{U} = A^T \dot{U}_n$ 代入式(20), 得:

$$Y_n \frac{\partial \dot{U}_n}{\partial \rho_i} = A \frac{\partial Y}{\partial \rho_i} (\dot{U}_s - \dot{U}) - A \frac{\partial \dot{I}_s}{\partial \rho_i} \quad (21)$$

依据节点电压方程矩阵形式, 代入具体数值求解节点电压如下:

$$AYA^T \dot{U}_n = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_{n1} \\ \dot{U}_{n2} \end{bmatrix} = A(Y\dot{U}_s - \dot{I}_s) = \begin{bmatrix} 1/Z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_3 & 0 \\ g_m & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2/0.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

解得:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_{n1} \\ \dot{U}_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/4 \\ -1/4 \end{bmatrix} \text{V} \quad (22)$$

进而得支路电压为:

$$\dot{U} = \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \\ \dot{U}_4 \end{bmatrix} = A^T \dot{U}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5/4 \\ -1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/4 \\ -1/4 \\ 3/2 \\ -1/4 \end{bmatrix} \text{V} \quad (23)$$

由此得节点电压 \dot{U}_{n1} 和 \dot{U}_{n2} 对 Z_1 、 Y_3 及 g_m 的绝对灵敏度求解过程依次为

$$AYA^T \frac{\partial \dot{U}_n}{\partial Z_1} = Y_n \frac{\partial \dot{U}_n}{\partial Z_1} = A \frac{\partial Y}{\partial Z_1} (\dot{U}_s - \dot{U}) - A \frac{\partial \dot{I}_s}{\partial Z_1} = A \begin{bmatrix} -1/Z_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5/4 \\ 1/4 \\ -3/2 \\ 1/4 \end{bmatrix} - A \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

整理得：

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{U}_{n1}}{\partial Z_1} \\ \frac{\partial \dot{U}_{n2}}{\partial Z_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

下面对 Y_3 和 g_m 的灵敏度求解就不需要再考虑电流源偏导数了，因为 \dot{I}_s 与元件 Y_3 和 g_m 参数无关。

$$Y_n \frac{\partial \dot{U}_n}{\partial Y_3} = A \frac{\partial Y}{\partial Y_3} (\dot{U}_s - \dot{U}) = A \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5/4 \\ 1/4 \\ -3/2 \\ 1/4 \end{bmatrix}$$

整理得：

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{U}_{n1}}{\partial Y_3} \\ \frac{\partial \dot{U}_{n2}}{\partial Y_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$Y_n \frac{\partial \dot{U}_n}{\partial g_m} = A \frac{\partial Y}{\partial g_m} (\dot{U}_s - \dot{U}) = A \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5/4 \\ 1/4 \\ -3/2 \\ 1/4 \end{bmatrix}$$

整理得：

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{U}_{n1}}{\partial g_m} \\ \frac{\partial \dot{U}_{n2}}{\partial g_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{5}{4} \end{bmatrix} \quad (26)$$

故图 1 所求节点电压 \dot{U}_{n1} 和 \dot{U}_{n2} 对 Z_1 、 Y_3 及 g_m 的绝对灵敏度正确解答分别为：

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{U}_{n1}}{\partial Z_1} \\ \frac{\partial \dot{U}_{n2}}{\partial Z_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{15}{16} \\ \frac{3}{16} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{U}_{n1}}{\partial Y_3} \\ \frac{\partial \dot{U}_{n2}}{\partial Y_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{U}_{n1}}{\partial g_m} \\ \frac{\partial \dot{U}_{n2}}{\partial g_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{64} \\ -\frac{15}{64} \end{bmatrix} \quad (27)$$

若采用第 3 节问题讨论中的解决方案二，依据图 1 和网络线图 2 可知 $\dot{U}_{Z1} = \dot{U}_1 - \dot{U}_s$ ，得广义支路方程的矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \\ \dot{I}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/Z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_3 & 0 \\ g_m & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \\ \dot{U}_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{U}_s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ g_m \dot{U}_s \end{bmatrix}$$

即对应图 6 的支路电压源和电流源列矢量分别为 $\dot{U}_s = [\dot{U}_s \ 0 \ 0 \ 0]^T$ 和 $\dot{I}_s = [0 \ 0 \ 0 \ g_m \dot{U}_s]^T$ ，由节点电压方程的矩阵形式，代入数值得：

$$AYA^T \dot{U}_n = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_{n1} \\ \dot{U}_{n2} \end{bmatrix} = A(Y\dot{U}_s - \dot{I}_s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1/Z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_3 & 0 \\ g_m & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ g_m \dot{U}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

可解得节点电压和支路电压结果与式(22)和式(23)相同。继续分别求解 \dot{U}_{n1} 和 \dot{U}_{n2} 对 Z_1 、 Y_3 及 g_m 的绝对灵敏度过程如下：

$$AYA^T \frac{\partial \dot{U}_n}{\partial Z_1} = Y_n \frac{\partial \dot{U}_n}{\partial Z_1} = A \frac{\partial Y}{\partial Z_1} (\dot{U}_s - \dot{U}) - A \frac{\partial \dot{I}_s}{\partial Z_1}$$

代入数值得：

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{U}_{n1}}{\partial Z_1} \\ \frac{\partial \dot{U}_{n2}}{\partial Z_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/Z_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 - 5/4 \\ 1/4 \\ -3/2 \\ 1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

可见此等式与式(24)相同。

$$Y_n \frac{\partial \dot{U}_n}{\partial Y_3} = A \frac{\partial Y}{\partial Y_3} (\dot{U}_s - \dot{U}) - A \frac{\partial \dot{I}_s}{\partial Y_3}$$

代入数值得：

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{U}_{n1}}{\partial Y_3} \\ \frac{\partial \dot{U}_{n2}}{\partial Y_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/4 \\ 1/4 \\ -3/2 \\ 1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

可见此式与式(25)相同。

$$Y_n \frac{\partial \dot{U}_n}{\partial g_m} = A \frac{\partial Y}{\partial g_m} (\dot{U}_s - \dot{U}) - A \frac{\partial \dot{I}_s}{\partial g_m}$$

代入数值得：

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{U}_{n1}}{\partial g_m} \\ \frac{\partial \dot{U}_{n2}}{\partial g_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/4 \\ 1/4 \\ -3/2 \\ 1/4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{5}{4} \end{bmatrix}.$$

可见与式(26)相同。

由此,采用解决方案二求解 \dot{U}_{n1} 和 \dot{U}_{n2} 对 Z_1 、 Y_3 及 g_m 的绝对灵敏度与式(27)结果相同。对于采用解决方案三的求解过程读者可以自行分析,但不论采用哪种方案,最终解答都将完全相同。

5 结束语

文章通过问题的提出与分析、问题讨论和解答过程可见,用增量网络法的矩阵形式分析电路绝对灵敏度时,需要掌握电路原理的本质、求解方法的适用范围和分析方法的多样性,具体总结如下:

1) 控制量选择节点电压 \dot{U}_{n1} 或阻抗 Z_1 的电压 \dot{U}_{Z1} , 不影响节点导纳矩阵,因为节点导纳矩阵与独立电源无关,当独立源均不作用时, \dot{U}_{n1} 就等于 \dot{U}_{Z1} 。这一点可根据自导和互导的物理意义加以理解;

2) 控制量是否包括独立电压源虽然不影响节点导纳矩阵,但影响节点方程等式右侧的流入电流;

3) 当控制量包含独立电压源时,不能套用标准的支路方程和节点电压方程的矩阵形式,因为这些形式都是基于阻抗或导纳上的电压为控制量而推导得出的;

4) 可以通过等效变换的方法将受控源的控制量等效到阻抗或导纳元件上。

可见,只要透彻理解节点电压方程的实质是 KCL 方程,对电路参数求导不要有遗漏,就能找到问题所在。

参 考 文 献

- [1] 全少理, 郭勇, 杨卓, 等. 基于灵敏度分析的交直流配电网无功补偿策略[J]. 电力科学与技术学报, 2021, 36(5): 104-112.
Quan Shaoli, Guo Yong, Yang Zhuo, et al. Reactive power compensation strategy for AC/DC hybrid distribution network based on the sensitivity analysis[J]. Journal of Electric Power Science and Technology, 2021, 36(5): 104-112.
- [2] 陈波, 陈秋逸, 郑富永, 等. 基于电压灵敏度的交直流电力系统静态电压安全域评估方法[J]. 智慧电力, 2022, 50(6): 28-34.
Chen Bo, Chen Qiuyi, Zheng Fuyong, et al. Evaluation Method of Static Voltage Security Region of AC/DC Power System Based on Voltage Sensitivity[J]. Smart Power, 2022, 50(6): 28-34.
- [3] 刘兴宇, 夏露, 王世宁, 等. 基于砷化镓的霍尔芯片灵敏度优化设计[J]. 传感器与微系统, 2022, 41(10): 100-102, 107.
Liu Xingyu, Xia Lu, Wang Shining, et al. Optimal design for improving sensitivity of Hall chip based on GaAs[J]. Transducer and Microsystem Technologies, 2022, 41(10): 100-102, 107.
- [4] 王晨旭, 唐飞, 刘涤尘, 等. 基于双层代理模型的概率 - 区间潮流计算及灵敏度分析[J]. 电工技术学报, 2022, 37(5): 1181-1193.
Wang Chenxu, Tang Fei, Liu Dichen, et al. Probabilistic-Interval power flow and sensitivity analysis using double layer surrogate method[J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2022, 37 (5): 1181-1193.
- [5] 赵良德, 邢新超. 基于网损灵敏度的 DG 优化配置快速计算方法 [J]. 电测与仪表, 2018, 55(7): 31-35.
Zhao Liangde, Xing Xincho. Fast determination method of DG optimal placement based on network loss sensitivity[J]. Electrical Measurement & Instrumentation, 2018, 55(7): 31-35.
- [6] 邱子天, 刘永强, 梁兆文. 一种基于电压对电容灵敏度的台区电压控制方法[J]. 电测与仪表, 2020, 57(6): 1-5.
Qiu Zitian, Liu Yongqiang, Liang Zhaojun. A voltage control method of transformer areas based on sensitivity of voltage to capacitance[J]. Electrical Measurement & Instrumentation, 2020, 57(6): 1-5.
- [7] Eisa Sameh A., Stechlinski Peter. Sensitivity analysis of nonsmooth power control systems with an example of wind turbines[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2021, 95.
- [8] 姚科明, 李大伟, 张本辉. 基于不确定理论的可靠性参数灵敏度分析[J]. 电光与控制, 2021, 28(12): 67-70.
Yao Keming, Li Dawei, Zhang Benhui. Sensitivity analysis of reliability parameters based on uncertainty theory[J]. Electronics Optics & Control, 2021, 28(12): 67-70.
- [9] 张开银, 许灿, 张斌, 等. 基于设计参数灵敏度分析的模型修正方法研究[J]. 武汉理工大学学报(交通科学与工程版), 2021, 45 (6): 1128-1132.
Zhang Kaiyin, Xu Can, Zhang Bin, et al. Research on model correction method based on sensitivity analysis of design parameters[J]. Journal of Wuhan University of Technology (Transportation Science & Engineering), 2021, 45 (6): 1128-1132.
- [10] Chun Junho. Sensitivity analysis of system reliability using the complex-step derivative approximation [J]. Reliability Engineering and System Safety, 2021, 215.
- [11] Wang Ting, Rathinam Muruhan. On the validity of the Girsanov transformation method for sensitivity analysis of stochastic chemical reaction networks[J]. Stochastics, 2021, 93(8).
- [12] 胡潇云, 赵霞, 冯欣欣. 基于稀疏多项式混沌展开的区域电-气联合系统全局灵敏度分析[J]. 电工技术学报, 2020, 35 (13): 2805-2816.
Hu Xiaoyun, Zhao Xia, Feng Xinxin. Global sensitivity analysis for regional integrated electricity and gas system based on sparse polynomial chaos expansion[J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2020, 35 (13): 2805-2816.
- [13] 田荣明, 唐京瑞. 基于物联网技术的船舶电气设备检修方法优化分析[J]. 舰船科学技术, 2020, 42(2): 121-123.
Tian Rongming, Tang Jingrui. Optimization analysis of ship electrical equipment maintenance method based on internet of things technology [J]. Ship Science and Technology, 2020, 42(2): 121-123.
- [14] 刘建英, 毕胜, 吴东华, 等. 可控变压整流器的参数灵敏度分析 [J]. 江苏大学学报(自然科学版), 2021, 42(4): 466-472.
Liu Jianying, Bi Sheng, Wu Donghua, et al. Sensitivity analysis of parameters for controllable transformer rectifier[J]. Journal of Jiangsu University(Natural Science Edition), 2021, 42(4): 466-472.
- [15] 王诗荣, 张师. 基于灵敏度分析的电力系统无功优化方法研究 [J]. 电气开关, 2021, 59 (2): 39-41.
Wang Shirong, Zhang Shi. Research on the reactive power optimization of a power system based on sensitivity analysis[J]. Electric Switchgear, 2021, 59(2): 39-41.
- [16] 苏洁莹, 林楷东, 张勇军, 等. 基于统一潮流建模及灵敏度分析的电-气网络相互作用机理[J]. 电力系统自动化, 2020, 44 (2): 43-52.

(下转第 122 页)